$\forall x \in S : (\rho_a \rho)(x) = \rho_a(\rho(x)) = \rho(x) \cdot a = x\lambda(a) = \rho_{\lambda(a)} x$

$\Rightarrow \rho_a \rho = \rho_{\lambda(a)}$

(١) و (٢)

تمرين (دورة)

أثبت أنه إذا كانت نصف الزمرة S تملك حيادياً فإن كل انسحاب يميني لـ S هو داخلي

الحل: لتكن φ انسحاب يميني لـ S و 1 الحيادي لـ S ومنه أياً كان $x \in S$ فإن:

$x\varphi(1) = \varphi(x \cdot 1) = \varphi(x)$ $\quad (xb = \rho_b(x))$

$\rho_{\varphi(1)}(x) = \varphi(x) \Rightarrow \rho_{\varphi(1)} = \varphi$ أي $\varphi = \rho_{\varphi(1)}$ داخلي

تذكير ⇐ φ انسحاب يميني داخلي

إلى هنا المحاضرة كاملة

بداية المحاضرة السادسة

تمرين - دورة هام

لتكن A مجموعة غير خالية و $F(A)$ نصف زمرة التحويلات التامة لـ A

أثبت أن الشرط اللازم والكافي ليكون $\psi \in F(A)$ قاسم يساري للعنصر $\varphi \in F(A)$

هو أن يكون $\varphi(A) \subseteq \psi(A)$

الحل:

لزوم الشرط: لنفرض أن ψ قاسم يساري للعنصر φ ⇐ يوجد عنصر $g \in F(A)$ بحيث يكون $\varphi = \psi g$ وبالتالي ($g(A) \subseteq A$)

$\varphi(A) = (\psi g)(A) \subseteq \psi(A)$

$\Rightarrow \varphi(A) \subseteq \psi(A)$

كفاية الشرط: نفرض أنه

$\varphi(A) \subseteq \psi(A) \Rightarrow \forall x \in A$ يوجد: $\varphi(x) \in \psi(A) \Rightarrow$

$\exists u \in A ; \varphi(x) = \psi(u)$

لنعرف التحويل $h : A \to A$ بالشكل $h(x) = u$

$(\psi h)(x) = \psi(h(x)) = \psi(u) = \varphi(x) \quad \forall x \in A$

$\Rightarrow \psi h = \varphi \Rightarrow$ ψ قاسم يساري للعنصر φ

Scanned by CamScanner

تعريف: إذا كانت $(S,\circ)$ ، $(T,\cdot)$ نصفي زمرتين فإن الجداء الديكارتي

$$S\times T=\{(s,t) : s\in S \ , t\in T\}$$

مع تعريف التشكيل الداخلي

$$(s,t)\cdot(s',t')=(s\circ s' \ , t\cdot t')$$

يشكل نصف زمرة ندعوها الجداء المباشر لنصفي الزمرتين T,S

تعريف: لتكن A,B مجموعتين غير خاليتين ، $S=A\times B$. نعرف عملية الضرب التالية على S

$$(a,b)(a',b')=(a,b') \quad ; \forall a,a'\in A \ , b,b'\in B$$

عندئذ ندعو S عصبة مستطيلة

مبرهنة

أثبت أن نصف الزمرة S إيزومورفية مع عصبة مستطيلة E إذا وفقط إذا كانت إيزومورفية مع الجداء المباشر لنصف زمرة صفرية يسارية ونصف زمرة صفرية يمينية

الحل: كفاية الشرط:

نفرض أن S إيزومورفية مع الجداء المباشر لنصف زمرة صفرية يسارية A ونصف زمرة صفرية يمينية B أي أن $S\cong A\times B$ فإنه

$$\forall a,a'\in A \ , \forall b,b'\in B : (a,b)(a',b')=(aa',bb')=(a,b')$$

وبالتالي فإن $A\times B$ عصبة

لزوم الشرط:

نفرض أن S إيزومورفية مع عصبة مستطيلة E ولنرمز لها $E\cong A\times B$

لتكن $E=A\times B$ حيث A,B غير خاليتين ونضع

$$\forall a,a'\in A \ , \forall b,b'\in B \ ; (a,b)(a',b')=(a,b')$$

لنعرف على A العملية التالية:

$\forall a,a'\in A \ ; aa'=a$ صفرية يسارية A

ولنعرف على B العملية التالية:

$\forall b,b'\in B \ ; bb'=b'$ صفرية يمينية B

ثم لنعرف التطبيق

$$id : A\times B\longrightarrow A\times B$$

$$(a,b)\longmapsto(a,b)$$

الذي ينقل العصبة المستطيلة $E=A\times B$ ويستقر بالجداء المباشر لنصفي الزمرتين $A\times B$

عنوان الجودة والذوق الرفيع...

لنبرهن أن cl هومومورفيزم

$cl((a,b)\cdot(a',b')) = cl(a,b') = (a,b')$

$cl(a,b)\cdot cl(a',b') = (a,b)\cdot(a',b') = (aa',bb') = (a,b')$

$\Rightarrow cl((a,b)\cdot(a',b')) = cl(a,b)\cdot cl(a',b')$

أي أن cl هومومورفيزم

ويكون cl تقابل حسب التعريف لأنه تطبيق مطابق ⇐ cl ايزومورفيزم

أي أن E ايزومورفية مع الجداء المباشر لنصف زمرة صفرية يسارية ونصف زمرة صفرية يمينية

⇐ S ايزومورفية مع الجداء المباشر

نصف الزمرة المولدة

تعريف: لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من نصف زمرة S،

إن المجموعة B المؤلفة من كل العناصر $b \in S$ التي يمكن التعبير عنها كجداء عناصر من A

(المنتمية الى عناصر A) هي نصف زمرة جزئية من S

نقول عن B انها نصف زمرة جزئية مولدة بـ A ونقول عن A أنها مجموعة مولدات B

ونكتب $B = \langle A \rangle$

وإذا كانت A مجموعة جزئية منتهية من S أي $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

عندئذ نكتب $B = \langle A \rangle$ بالشكل: $B = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ ويمكن التعبير عن

نصف الزمرة التي المجموعة مولداتها A بالشكل: $B = \langle A \rangle = A \cup AA \cup AAA \cup \dots$

نتائج:

1- $\langle\langle A \rangle\rangle = \langle A \rangle$

2- إذا كان $A_1 \subseteq A_2$ فإن $\langle A_1 \rangle \subseteq \langle A_2 \rangle$

ملاحظة: (تفيد من أجل البرهانات)

من المعروف أنه إذا كانت S نصف زمرة وكانت $\{K_i, i \in I\}$ مجموعة أنصاف زمر

جزئية من S فإن $\bigcap_{i \in I} K_i$ هو مجموعة خالية أو نصف زمرة جزئية من S

إذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من نصف زمرة S وكانت B عبارة عن تقاطع

كل أنصاف الزمر الجزئية من S الحاوية على A (S تحوي A)

فإن B هي نصف زمرة جزئية من S تحقق:

1- $A \subseteq B$

2- إذا كانت K نصف زمرة جزئية من S تحوي A فإن $B \subseteq K$ وبالتالي

فإن B هي أصغر نصف زمرة جزئية تحوي A

تمرين: دورة (بدها رابعة) هامة جداً

لتكن S نصف زمرة، A مجموعة جزئية غير خالية من S. أثبت أن $B = \langle A \rangle$

إذا فقط إذا كانت B هي تقاطع كل أنصاف الزمر الجزئية من S الحاوية على A

عنوان الجودة والذوق الرفيع

Scanned by CamScanner

كفاية الشرط: لنفرض أن B هو تقاطع كل الزمر الجزئية من S الحاوية على A فإن،

$A \subseteq B$ و B نصف زمرة ⟸ B تحوي كل الجداءات الممكنة لعناصر من A أي أن

$\boxed{\langle A \rangle \subseteq B}$

(نصف زمرة تحوي A)

ومن ناحية أخرى فإن $A \subseteq \langle A \rangle$ وبالتالي حسب تعريف B فإن $\boxed{B \subseteq \langle A \rangle}$

ومن الاحتواءين نستنتج المساواة

$B = \langle A \rangle$ حيث أن كل نصف زمرة جزئية من S تحوي A تحوي ⟨A⟩ فهي تحوي B

لزوم الشرط: لنفرض أن $B = \langle A \rangle$ ← B ... تقاطع كل أنصاف الزمر الجزئية الحاوية على A

أن كل نصف زمرة جزئية من S تحوي A تكون حاوية لنصف الزمرة المولدة بـ A أي $\langle A \rangle$

وبالتالي فهي تحوي B ومنه نستنتج (كل نصف زمرة جزئية من S تحوي A تكون حاوية لـ B

حسب الملاحظة الأخيرة (2) فإن B هو تقاطع جميع أنصاف الزمر الجزئية من S الحاوية

لـ A

تعريف:

إذا كانت S نصف زمرة وكانت A مجموعة جزئية غير خالية من S بحيث أن

$S = \langle A \rangle$ فإن A هي مجموعة مولدات S

ملاحظة:

أن كل نصف زمرة تملك مجموعة مولدات واحدة على الأقل، مثلاً S نفسها هي مجموعة مولدات S، لكنه عادة يوجد عدة مجموعات مولدة لنصف زمرة S وهذا واضح لأنه

إذا كانت $A \subseteq S$ مجموعة مولدات لـ S فإنه:

أي مجموعة جزئية من S تحوي A هي مجموعة مولدة لـ S أيضاً.

تعريف:

إذا كان a عنصراً من نصف زمرة S فإن

$\langle a \rangle = \{a, a^2, a^3, \ldots\} = \{a^n ; n \in N\}$

نصف زمرة جزئية من S تسمى نصف زمرة جزئية دائرية من S مولدها a وإذا كانت

$S = \langle a \rangle$ فإننا نقول عن S بأنها نصف زمرة دائرية مولدها a

إن مرتبة أي عنصر a في S هي

مرتبة نصف الزمرة الجزئية الدائرية $\langle a \rangle$

مثال: $S = \{\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3\}$

عدد عناصر نصف الزمرة $\langle \Lambda_1 \rangle$ = مرتبة Λ_1

عنوان الكورة والذوق الرفيع